

統計数理

石川顕一

<http://ishiken.free.fr/lecture.html>

<http://ocw.u-tokyo.ac.jp/course-list/engineering/statistics-mathematical-principle-2005/index.html> (昨年度のオープンコースウェア)

10/17 組み合わせと確率

10/24 確率変数と確率分布

10/31 代表的な確率分布

11/7 ランダムウォークと破産問題

11/14 ブラウン運動と拡散

11/21 雑音

統計数理

石川顕一

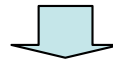
11/21 雑音

- ・ ウィーナー・ヒンチンの定理
- ・ ナイキストの定理

6-1 ウィーナー・ヒンチンの定理

- ・ 電気回路における雑音(noise)
 - 揺動力(random force)を含むモデルで表される現象の例
- ↓
- ・ 電気抵抗体の両端に発生する電圧 $V(t)$
 - 理想的には $V(t)=0$
 - 現実には、

内部にある伝導電子の熱雑音(thermal noise)



$V(t)$ はゼロのまわりに揺らぐ (雑音)

雑音に、どのような周波数成分が含まれているかを考える。→ パワースペクトル

6-1 ウィーナー・ヒンチンの定理

・ パワースペクトル

- 雑音 $V(t)$ を長い時間 T にわたって観測。

振動数 f の最小単位 $\frac{1}{T} \Rightarrow f_n = \frac{n}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$

$V(t)$ はこれらの振動数成分の和に分解できる。

$$V(t) = \sum_n e^{i2\pi f_n t} V_n \qquad V_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi f_n t} V(t) dt$$

フーリエ変換

- 一般に複素数 $V_{-n} = V_n^*$

$V(t)$ ランダム $\Rightarrow V_n$ ランダム

$|V_n|^2$ の平均を考える。

振幅の絶対値の2乗 → 各振動成分の強度

6-1 ウィーナー・ヒンチンの定理

・ パワースペクトル

$|V_n|^2$ の平均を考える。

振幅の絶対値の2乗 → 各振動成分の強度

振動数の微少な幅 Δf の中に含まれる振幅の強度

雑音のサンプルに
ついての平均

パワースペクトル(power spectrum) $S_V(f)\Delta f = 2 \sum_{f < f_n < f + \Delta f} \langle |V_n|^2 \rangle$

$$f_n = \frac{n}{T} \Rightarrow \Delta f \text{ の幅に含まれる振動数の数は } \Delta f \div \left(\frac{1}{T}\right) = T\Delta f$$

$$S_V(f)\Delta f = 2 \sum_{f < f_n < f + \Delta f} \langle |V_n|^2 \rangle \Rightarrow S_V(f)\Delta f = 2T \langle |\hat{V}(f)|^2 \rangle \Delta f \Rightarrow S_V(f) = 2T \langle |\hat{V}(f)|^2 \rangle$$

$$\hat{V}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi ft} V(t) dt$$

6-1 ウィナー・ヒンチンの定理

・ パワースペクトル

$$S_V(f) = 2T \left\langle \left| \hat{V}(f) \right|^2 \right\rangle \quad \hat{V}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi ft} V(t) dt$$

$$S_V(f) = \frac{2}{T} \int_0^T dt_1 \int_0^T e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle dt_2$$

定常状態 (平衡状態)

雑音の時間相関関数

$$\langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = \phi_V(t_1 - t_2)$$

$$\begin{aligned} S_V(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T dt_1 \int_0^T e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1 - t_2) dt_2 \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} \left[e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1 - t_2) + e^{-i2\pi f(t_2-t_1)} \phi_V(t_2 - t_1) \right] dt_2 \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1 - t_2) dt_2 + \text{C.C.} \\ &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) dt + \text{C.C.} = 4 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) \text{Re} \left[e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) \right] dt \end{aligned}$$

6-1 ウィーナー・ヒンチンの定理

・ パワースペクトル

$$S_V(f) = 4 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \operatorname{Re} \left[e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) \right] dt \rightarrow 4 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) \right] dt$$

$\phi_V(t)$ が減衰関数

ウィーナー・ヒンチン(Wiener-Khintchine)の定理

・ パワースペクトルは雑音の時間相関関数の積分(フーリエ変換)で表される

$$S_V(f) = 4 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) \right] dt$$

・ 白色雑音(white noise)

$\phi(t) = 2D_V \delta(t)$ 異なる時刻の雑音は全く相関がない

$S_V(f) = 4D_V$ 振動数に依存しない定数 $\Rightarrow$ 白色雑音

6-2 ナイキストの定理

6-2 ナイキストの定理

抵抗値 R の抵抗器の両端に現れる熱雑音のゆらぎのパワースペクトル強度が

$$S_V(f) = 4D_V \quad (\text{白色雑音})$$

の時、

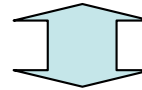
$$D_V = Rk_B T$$

RC回路

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} + \frac{V(t)}{R}$$

オームの法則

熱雑音による起電力



ブラウン運動

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u + \frac{R(t)}{m}$$

$$Q \Leftrightarrow u$$

$$\frac{1}{CR} \Leftrightarrow \gamma$$

6-2 ナイキストの定理

・ ナイキストの定理(Nyquist theorem)

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} + \frac{V(t)}{R}$$

$$Q(t) = Q(0)\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) + \int_0^t \frac{V(t')}{R} \exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right) dt'$$

$$\langle [Q(t)]^2 \rangle_{\text{eq}} = \langle [Q(0)]^2 \rangle_{\text{eq}} \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right) + \left\langle \left[\int_0^t \frac{V(t')}{R} \exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right) dt' \right]^2 \right\rangle_{\text{eq}}$$

$$+ \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \int_0^t \frac{\langle Q(0)V(t') \rangle_{\text{eq}}}{R} \exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right) dt'$$

(Note: An orange arrow points from the text "ゼロ" to the term $\langle Q(0)V(t') \rangle_{\text{eq}}$.)

$$\left\langle \left[\int_0^t \frac{V(t')}{R} \exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right) dt' \right]^2 \right\rangle_{\text{eq}} = \frac{1}{R^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp\left(-\frac{t-t_1}{CR}\right) \exp\left(-\frac{t-t_2}{CR}\right) \langle V(t_1)V(t_2) \rangle_{\text{eq}}$$

$$= \frac{2D_V}{R^2} \int_0^t dt_1 \exp\left(-\frac{2(t-t_1)}{CR}\right) = \frac{CD_V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right) \right] \quad \phi(t_1 - t_2) = 2D_V \delta(t_1 - t_2)$$

(Note: An orange arrow points from the text $\phi(t_1 - t_2) = 2D_V \delta(t_1 - t_2)$ to the term $\langle V(t_1)V(t_2) \rangle_{\text{eq}}$.)

6-2 ナイキストの定理

・ ナイキストの定理(Nyquist theorem)

$$\langle [Q(t)]^2 \rangle_{\text{eq}} = \langle [Q(0)]^2 \rangle_{\text{eq}} \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right) + \frac{CD_V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right)\right]$$

平衡状態では等しい



$$\langle [Q(t)]^2 \rangle_{\text{eq}} = \frac{CD_V}{R}$$

電荷によってコンデンサーに生じるエネルギー $E = \frac{Q^2}{2C}$

→ このゆらぎの実現確率は、ボルツマン分布に従う。

$$P_{\text{eq}}(Q) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{Q^2}{2k_B TC}\right)$$



$$\langle Q^2 \rangle_{\text{eq}} = Ck_B T$$

$$\frac{CD_V}{R} = Ck_B T$$



$$D_V = Rk_B T$$



$$S_V(f) = 4Rk_B T$$

ナイキストの定理

熱雑音が巨視的な観測量で決まる。

No. 10

6-2 ナイキストの定理

・ 白色雑音(white noise)

$$\left. \begin{aligned} \phi(t) &= 2D_V \delta(t) && \text{異なる時刻の雑音は全く相関がない} \\ S_V(f) &= 4D_V && \text{振動数に依存しない定数} \end{aligned} \right\} \text{一種の理想化}$$

・ ローレンツ型雑音

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \langle V^2 \rangle e^{-t/\tau} && \text{揺らぎの時間相関関数に有限の時定数 } \tau \\ S_V(f) &= \langle V^2 \rangle \frac{4\tau}{(2\pi f\tau)^2 + 1} && \text{Lorentzian noise} \end{aligned}$$