

統計数理・信号処理工学 課題 & 解答 1

石川 顕一

E-mail: ishiken@q.t.u-tokyo.ac.jp

URL: <http://ishiken.free.fr/lecture.html>

2005 年 10 月 17 日

提出期限は 10 月 24 日。講義時に手渡し、あるいはメールで。

問 外見が全く同じで、外からは中身の見えない 3 つの箱がある。あなたの友達が、あなたの見ていないときに無作為に 1 つを選び、その中にボールを入れる。あなたは、ボールがどの箱に入れられたかを当てる。

1. まず、でたために 1 つの箱を選ぶことにする。あなたの選んだ箱（箱 A と呼ぶ）に実際ボールが入っている確率はいくらか。

[解答例]

$$\frac{1}{3}$$

2. その後、友達に残りの 2 つの箱のうちから、ボールの入っていない箱を無作為に 1 つ選び、あなたに教える（ただし、箱 A にボールが入っていない場合、友達を選ぶ箱は必然的に 1 つに決まる）。友達を選んだ方の箱を C、選ばなかった方の箱を B と呼ぶことにする。ここで、あなたはあらためて、箱 A と B のうちどちらにボールが入っているかを選び直してよいとする。より高い確率でボールの入っている箱を当てるためには、どちらの箱を選んだ方がよいか。また、その時、実際に当たっている確率はいくらか。

[解答例]

友達がボールの入っていない箱として C を選ぶ事象を γ 、箱 A(B) に実際にボールが入っている事象を A(B) と書く。実際に A にボールが入っている場合に友達がボールの入っていない箱として C を選ぶ条件付き確率 $P(\gamma|A)$ は、

$$P(\gamma|A) = \frac{1}{2}$$

同様に

$$P(\gamma|B) = 1$$

よって、ベイズの定理を用いて、

$$P(A|\gamma) = \frac{1}{3}, \quad P(B|\gamma) = \frac{2}{3}$$

従って、B の箱を選んだ方がよく、その時、実際に当たっている確率は $\frac{2}{3}$ である。友達がボールの入っていない箱を指定する前後で、A にボールが入っている確率は変化しないことに注意。